

CEBİR III SINAV SORULARININ ÖZET ÇÖZÜMLERİ (05.01.2010)

1 a) $f(x) = 5x^5 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 6 \in \mathbb{Z}[x]$ asaldır

1 a) nın çözümü: İddia doğrudur.

Yöntem: Eisenstein Kriteri, Kullanılacak olan asal sayı: 2

i) $2 \mid 6, 2 \mid -30, 2 \mid 24, 2 \mid -12$

ii) $2 \nmid 5$

iii) $2^2 \nmid 6$

koşulları sağlandığından $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ asaldır. $(5, -12, 24, -30, 6) = 1$ olduğundan, bir primitif polinomdur.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ primitif} \\ f(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ asal} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ asaldır (Bakınız ders notları). } f(x) \in \mathbb{Z}[x]$$
 polinomu primitiftir.

1 b) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ tir.

1 b) nin çözümü: İddia yanlıştır. $\alpha := \sqrt{5}, \beta := \sqrt[3]{5}$ biçiminde tanımlansın.

$\alpha = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2 = 5 \Rightarrow \alpha^2 - 5 = 0 \Rightarrow \alpha, x^2 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir köküdür.

Eisenstein kriterine göre, $p = 5$ asalı için, $x^2 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ asaldır (Sınavda burası açıkça gösterilmeli)

i) $\sqrt{5}, x^2 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir köküdür

ii) $x^2 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ asal ve moniktir.

O halde, $\text{irr}(\sqrt{5}, \mathbb{Q}) = x^2 - 5, [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = \deg(\sqrt{5}, \mathbb{Q}) = \deg(x^2 - 5) = 2$ dir.

$\beta = \sqrt[3]{5} \Rightarrow \beta^9 = 5 \Rightarrow \beta^9 - 5 = 0 \Rightarrow \beta, x^9 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir köküdür.

Yine Eisenstein kriterine göre ve yine $p = 5$ asalı için, $x^9 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ asaldır (Sınavda burası da açıkça gösterilmeli)

i) $\sqrt[3]{5}, x^9 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir köküdür

ii) $x^9 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ asal ve moniktir.

O halde, $\text{irr}(\sqrt[3]{5}, \mathbb{Q}) = x^9 - 5, [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = \deg(\sqrt[3]{5}, \mathbb{Q}) = \deg(x^9 - 5) = 9$ dur.

Şimdi, $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ olsa;

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \\ \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \text{ olurdu. Bu durumda, } n := [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] \in \mathbb{N}$$

olmak üzere,

$$9 = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 2n \quad \text{çelişkisi elde edilirdi.}$$

O halde $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ dir.

1c) Cebirsel kapalı cisimler birbirlerine izomorftur

1 c) nin çözümü: İddia yanlıştır. Kompleks sayılar cismi, $\mathbb{C}$, cebirsel kapalı bir cisimdir.

Ayrıca, $\mathbb{C}$ cebirsel kapalı olduğundan, $\bar{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha, \mathbb{Q} \text{ üzerinde cebirsel}\}$ de cebirsel kapalı bir cisimdir (Bakınız ders notları). Fakat, $\bar{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}$ ve $\mathbb{C}$ cisimleri izomorf değildir. Çünkü, bu cisimler birbirlerine izomorf olsalar, en az bir

$\varphi: \bar{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ cisim izomorfisi bulunurdu. φ , üzerine bir tasvir ve $\pi \in \mathbb{C}$ olduğundan,

$\pi = \varphi(\alpha)$ olacak biçimde bir $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}$ elemanı vardır. Fakat bu, $\pi \in \mathbb{C}$ nin $\mathbb{Q}$ üzerinde transandant olması ile çelişmektedir (Çelişki nerede?). O halde bu cisimler izomorf değildir.

$$\mathbf{1d)} \quad [\mathbb{Q}(\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}) : \mathbb{Q}] = 4$$

1 d) nin çözümü: İddia yanlıştır.

$1, \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ ve $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ bir cisim olduğundan, $1-\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ dir. Dolayısıyla,

$\mathbb{Q}(\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{7})(1-\sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ dir (Bir cisme kendisine ait olan bir eleman katılırsa yeni bir cisim elde edilmez).

$\text{irr}(\sqrt{7}, \mathbb{Q}) = x^2 - 7$ (Sınavda açıkca gösterilmeli) olduğundan,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{7}) : \mathbb{Q}] = \deg(\sqrt{7}, \mathbb{Q}) = \deg(x^2 - 7) = 2 \neq 4$$

tür.

2. F bir cisim olsun. Eğer, her $F \leq E$ cebirsel genişlemesi için $F = E$ koşulu gerçekleşiyorsa F bir cebirsel kapalı cisimdir. Gösteriniz.

2 nin çözümü: F bir cisim, $f(x) \in F[x] - F$ olsun. Kronocker teoremine göre, $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in K$ olacak biçimde bir $F \leq K$ cisim genişlemesi vardır.

$f(\alpha) = 0$, $f(x) \in F[x]^*$ olduğundan, α , F üzerinde cebirseldir. Dolayısıyla, $F \leq F(\alpha)$ bir cebirsel genişlemedir (bakınız ders notları). O halde, hipoteze göre $F = F(\alpha)$ ve dolayısıyla $\alpha \in F$ dir.

Böylelikle, $F[x]$ polinomlar halkasından alınan sabitden farklı her polinomun F de en az bir kökünün olduğunu göstermiş olduk. O halde, F cebirsel kapalı bir cisimdir.