

Teorem 4.28 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Eğer A kümesi lineer bağımsız ise A nın her alt kümesi de lineer bağımsızdır.

Sonuç 4.29 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Eğer A kümesi lineer bağımlı ise V nin A yı kapsayan her sonlu alt kümesi de lineer bağımlıdır.

Önerme 4.30 Bir vektör uzayında sıfır vektörünü içeren her sonlu alt küme lineer bağımlıdır.

Önerme 4.31 V bir F - vektör uzayı ve $v \in V - \{0_V\}$ olsun. Bu durumda, $\{v\}$ kümesi lineer bağımsızdır, başka bir ifadeyle sıfır vektöründen farklı bir vektör tek başına lineer bağımsızdır.

Teorem 4.32 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. A kümesinin F - lineer bağımlı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinden birisinin diğerlerinin bir F - lineer birleşimi biçiminde yazılabilmesidir.

Örnek 4.33 $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayında $A = \{(1, 1, -1), (2, 3, 1), (4, 5, -1)\}$ kümesi $\mathbb{R}$ - lineer bağımlıdır.

Sonuç 4.34 V bir F - vektör uzayı ve $v, w \in V$ olsun. v, w vektörlerinin F - lineer bağımlı olması için gerekli ve yeterli koşul $v = \alpha w$ veya $w = \alpha v$ olacak biçimde $\alpha \in F$ elemanının bulunmasıdır (yani birinin diğerinin bir skaler katı olmasıdır)

Örnek 4.35 Katsayıları reel sayı tüm tek değişkenli polinomların oluşturduğu küme $\mathbb{R}[x]$ olmak üzere, $V := \mathbb{R}[x]$ kümesi polinomların toplanması ve aşağıdaki gibi tanımlanan bir polinomla bir skalerin çarpılması işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı oluşturur:

Her $\alpha \in \mathbb{R}$, her $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ için $(a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$

$$\alpha \cdot f(x) := (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \dots + (\alpha a_n)x^n$$

İspat. Ödev

Bir vektör uzayında sonlu bir kümenin lineer bağımsızlığını ve lineer birleşimini tanımlamıştık. Şimdi de bu kavramları sonlu olması gerekmeyen kümeler için tanımlayalım:

Tanım 4.36 V bir F - vektör uzayı ve $A \subseteq V$ olsun. Bu durumda A kümesinin bir sonlu alt kümesinin bir lineer birleşimine A nın bir F - lineer birleşimi denir.

Örnek 4.37 $V = \mathbb{R}[x]$ kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde oluşturduğu vektör uzayının

$A = \{x^{2k} : k \in \mathbb{N}\} = \{x^2, x^4, x^6, \dots\}$ alt kümesinin bir lineer birleşimi $f(x) = 3x^2 + 4x^4 - 5x^{10}$ dur.

Tanım 4.38 V bir F - vektör uzayı ve A, V nin sonsuz elemanlı bir alt kümesi olsun. Eğer A kümesinin her sonlu alt kümesi F - lineer bağımsızsa A kümesi F - lineer bağımsızdır denir. Aksi takdirde, yani A kümesinin F - lineer bağımlı olan bir sonlu alt kümesi varsa A kümesine F - lineer bağımlıdır denir.

Örnek 4.39 $V = \mathbb{R}[x]$ kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde oluşturduğu vektör uzayında

$A = \{x^k : 0 \leq k \in \mathbb{Z}\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ kümesi $\mathbb{R}$ - lineer bağımsızdır.

Teorem 4.40 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Bu durumda A kümesinin tüm F - lineer birleşimlerinden oluşan küme yani $W := \{\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_nv_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ kümesi

V nin, $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesini kapsayan bir alt F - vektör uzayıdır. Ayrıca $A \subseteq U$ ve U, V nin bir alt vektör uzayı ise $W \subseteq U$ dur. Başka bir ifadeyle $W := \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$, V nin A kümesini kapsayan en küçük alt vektör uzayıdır.

İspat.

Tanım 4.41 Teorem 4.34 ün notasyonu geçerli olmak üzere, V nin

$$\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

alt vektör uzayına $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin (veya $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesinin) gerdiği (veya ürettiği) alt uzay denir ve bu alt uzay $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ veya $Sp(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ile gösterilir.

Not 4.42 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Bu durumda, $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ ile ilgili şunlar geçerlidir:

- i) $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle, V$ nin bir alt vektör uzayıdır.
- ii) $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$
- iii) $A \subseteq U$ ve U, V nin bir alt vektör uzayı ise $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \subseteq U$ dur.

Teorem 4.43 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Eğer, $v_n \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ ise $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$

Örnek 4.44 $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayında $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ kümesinin gerdiği alt uzayı bulunuz.

Örnek 4.45 $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayında $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesinin gerdiği alt uzayı bulunuz.

Çözüm.

$$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

dür yani $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ü gerer.

Örnek 4.46 $V = \mathbb{R}^2$ uzayını geren bir küme bulunuz.

Çözüm.

Örnek 4.47 $V = \mathbb{R}[x]$ vektör uzayında $A = \{1, x, x^2\}$ kümesi hangi alt vektör uzayını gerer?

Tanım 4.48 V bir F - vektör uzayı ve $B \subseteq V$ olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul gerçekleşirse B kümesine V nin bir F - tabanı denir.

- i) V nin her elemanı B kümesinin bir F - lineer birleşimi olarak yazılabilir.
- ii) B kümesi F - lineer bağımsızdır.

Not 4.49 V bir F - vektör uzayı ve $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Bu durumda, yani B nin sonlu olması durumunda, taban olmanın koşulları aşağıdaki gibidir:

- i) $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ dir yani $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi V yi gerer.
 ii) $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi F - lineer bağımsızdır.

Örnek 4.50 $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ kümesi $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ - tabanıdır.

Uyarı 4.51 Bir vektör uzayının tabanı 1 den fazla olabilir. Mesela, $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ kümesi de $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ - tabanıdır.

Örnek 4.52 Her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\mathbb{R}^n$ de i . bileşeni 1 diğer bileşenleri sıfır olan vektör e_i olmak üzere, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ kümesi $V = \mathbb{R}^n$ vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ - tabanıdır.

Örnek 4.53 $B = \{x^k : 0 \leq k \in \mathbb{Z}\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ kümesi, $V = \mathbb{R}[x]$ vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ - tabanıdır.

Örnek 4.54 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ kümesi, $V = \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ - tabanıdır.

Teorem 4.55 V bir F - vektör uzayı ve $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Bu durumda, B kümesinin V nin bir F - tabanı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $v \in V$ için $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ olacak biçimde tek türlü bir yazılışın var olmasıdır.

Teorem 4.56 V bir F - vektör uzayı ve $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesi V nin bir F - tabanı olsun. $m < n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, V nin n elemanlı her alt kümesi lineer bağımlıdır.

İspat. $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq V$ olsun. Amacımız bu kümenin lineer bağımlı olduğunu göstermektir.

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesi V nin bir F - tabanı olduğundan V nin her elemanı $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesinin F - lineer birleşimi olarak yazılabilir. Özel olarak $w_1, \dots, w_n$ elemanları da bu şekilde yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned} w_1 &= c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \dots + c_{m1}v_m \\ w_2 &= c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{m2}v_m \\ &\vdots \\ w_n &= c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + \dots + c_{mn}v_m \end{aligned}$$

olacak biçimde $c_{ij} \in F$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) elemanları vardır.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$ toplamına bakalım:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i &= \alpha_1 (c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \dots + c_{m1}v_m) + \alpha_2 (c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{m2}v_m) + \dots + \alpha_n (c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + \dots + c_{mn}v_m) \\ &= (\alpha_1 c_{11}v_1 + \alpha_1 c_{21}v_2 + \dots + \alpha_1 c_{m1}v_m) + (\alpha_2 c_{12}v_1 + \alpha_2 c_{22}v_2 + \dots + \alpha_2 c_{m2}v_m) + \dots + (\alpha_n c_{1n}v_1 + \alpha_n c_{2n}v_2 + \dots + \alpha_n c_{mn}v_m) \\ &= (\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \dots + \alpha_n c_{1n})v_1 + (\alpha_1 c_{21} + \alpha_2 c_{22} + \dots + \alpha_n c_{2n})v_2 + \dots + (\alpha_1 c_{m1} + \alpha_2 c_{m2} + \dots + \alpha_n c_{mn})v_m \end{aligned}$$

dir. $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu da göz önüne alındığında

$\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = 0_V$ olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \dots + \alpha_n c_{1n} = 0_F$$

$$\alpha_1 c_{21} + \alpha_2 c_{22} + \dots + \alpha_n c_{2n} = 0_F$$

$$\alpha_1 c_{m1} + \alpha_2 c_{m2} + \dots + \alpha_n c_{mn} = 0_F$$

olduğu anlaşılır. Bu ise $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in F^n$ nin n bilinmeyen ve m denklemden oluşan

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = 0_F$$

$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = 0_F$$

$$\vdots$$

$$c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n = 0_F$$

lineer homojen denklem sisteminin bir çözümü olması anlamına gelir. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankı r olmak üzere $r \leq m < n$ olduğundan sistemin $(0_F, \dots, 0_F)$ dışında başka çözümleri de vardır. O halde $\{w_1, \dots, w_n\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

Sonuç 4.57. V bir F - vektör uzayı ve $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesi V nin bir F - tabanı olsun. Bu durumda, V nin lineer bağımsız bir alt kümesinin eleman sayısı en fazla m olabilir.

Sonuç 4.58 V bir F - vektör uzayı ve $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesi V nin bir F - tabanı olsun. Bu durumda, V nin her F - tabanında tam m tane eleman vardır.

Sonuç 4.59 V bir F - vektör uzayı ve B kümesi V nin sonsuz elemanlı bir F - tabanı olsun. Bu durumda, V nin her F - tabanında sonsuz sayıda eleman vardır.

Tanım 4.60 V bir F - vektör uzayı olsun. Eğer V nin her sonsuz elemanlı alt kümesi lineer bağımlı ise V ye bir sonlu boyutlu vektör uzayı denir.

Örnek 4.61 $V = \mathbb{R}[x]$ vektör uzayı sonlu boyutlu değildir.

Önerme 4.62 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V nin bir lineer bağımsız alt kümesi ve $v_{n+1} \in V$ olsun. Eğer $v_{n+1} \notin \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ ise $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ kümesi de lineer bağımsızdır.

Teorem 4.63 $V \neq \{0_V\}$ bir sonlu boyutlu F - vektör uzayı olsun. Bu durumda, V nin en az bir F - tabanı vardır ve bu taban zorunlu olarak sonlu elemanlıdır.

İspat. V nin hiç F - tabanının bulunmadığını varsayalım. Bu varsayım altında tümevarımla şu önermeyi ispat edelim:

Her n pozitif tam sayısı için V nin $n \leq s(A_n)$ koşuluna uyan bir A_n lineer bağımsız alt kümesi vardır.

...

Tanım 4.64 V bir F - vektör uzayı ve B kümesi V nin bir F - tabanı olsun. Bu durumda, B kümesinin eleman sayısına V nin F - üzerindeki boyutu denir ve bu boyut $\text{boy}_F V$ (veya $\dim_F V$) ile gösterilir. Sadece sıfır vektöründen oluşan vektör uzayının boyutu ise sıfır olarak tanımlanır.

Örnek 4.65 $\text{boy}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = ?$, $\text{boy}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = ?$, $\text{boy}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = ?$, $\text{boy}_{\mathbb{R}} \text{Mat}(2, \mathbb{R}) = ?$, $\text{boy}_{\mathbb{R}} \text{Mat}(n, \mathbb{R}) = ?$,
 $\text{boy}_{\mathbb{R}} \text{Mat}(2, \mathbb{R}) = ?$, $\text{boy}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = ?$

Not 4.66. Boyut kavramı iyi tanımlıdır.

Örnek 4.67 $V = \mathbb{R}[x]$ vektör uzayının $W = \{a + bx + cx^2\}$ alt vektör uzayı için $\text{boy}_{\mathbb{R}} W = ?$

Örnek 4.68 $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayının $W = \langle (1,2,3), (2,1,4), (4,5,10) \rangle$ alt vektör uzayı için $\text{boy}_{\mathbb{R}} W = ?$

Teorem 4.69 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. Eğer, $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ ise V nin $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tarafından kapsanan bir F - tabanı vardır ve dolayısıyla $\text{boy}_F V \leq n$ dir.

Teorem 4.70 V bir sonlu boyutlu F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V nin bir lineer bağımsız alt kümesi olsun. Bu durumda, V nin A kümesini kapsayan bir F - tabanı vardır.

Teorem 4.71 Sonlu boyutlu bir vektör uzayının her alt vektör uzayı da sonlu boyutludur.

Teorem 4.72 V bir F - vektör uzayı ve W da V nin bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda, $\text{boy}_F W \leq \text{boy}_F V$ dir. Başka bir ifadeyle alt vektör uzayının boyutu üst vektör uzayının boyutunu geçemez.