

Teorem 4.73 V bir sonlu boyutlu F - vektör uzayı ve W da V nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer $\text{boy}_F V = \text{boy}_F W$ ise $V = W$ dur. Başka bir ifadeyle $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n boyutlu bir vektör uzayının n boyutlu tek alt uzayı kendisidir.

Örnek 4.74 $V = \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ vektör uzayının 4 boyutlu tek alt vektör uzayı vardır o da kendisidir.

Teorem 4.75 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n boyutlu bir vektör uzayında n elemanlı lineer bağımsız küme o vektör uzayının bir tabanıdır.

Örnek 4.76 $\{(2,3,1), (5,3,0), (7,0,0)\}$ kümesi $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı mıdır?

Örnek 4.77 $\{(2,3), (3,2)\}$ kümesi $V = \mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı mıdır?

Örnek 4.78 Aşağıda verilen vektörlerin yanlarında belirtilen vektör uzaylarında lineer bağımsız olup olmadıklarını araştırınız.

i) $\{(2,3,1), (5,3,0), (7,4,3), (2,5,1)\}, V = \mathbb{R}^3$

ii) $\{(2,3), (3,2), (1,0)\}, V = \mathbb{R}^2$

Örnek 4.79 $V = \mathbb{R}^2$ vektör uzayının $\{(3,4)\}$ kümesini kapsayan bir tabanı var mıdır? Varsa böyle bir taban bulunuz.

Örnek 4.80 $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayının $\{(1,2,3), (2,1,3)\}$ kümesini kapsayan bir tabanı var mıdır? Varsa böyle bir taban bulunuz.

Örnek 4.81 $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayının $\{(2,1,-3), (-4,-2,6)\}$ kümesini kapsayan bir tabanı var mıdır? Varsa böyle bir taban bulunuz.

Not 4.82 F bir cisim ve $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $m \times n$ lik bir F matrisi olsun. Bu durumda, bu matrisin

her bir satırına $\mathbb{R}^n$ in bir elemanı gözüyle bakacağız. Benzer biçimde bu matrisin her bir sütununa ise $\mathbb{R}^m$ nin bir elemanı gözüyle bakacağız.

Örnek 4.83

Tanım 4.84 F bir cisim ve $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $m \times n$ lik bir F matrisi olsun. Bu matrisin

satırlarının $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında ürettiği (gerdiği) alt uzaya A matrisinin satır uzayı denir. Benzer biçimde, A matrisin sütunlarının $\mathbb{R}^m$ vektör uzayında ürettiği (gerdiği) alt uzaya A matrisinin sütun uzayı denir.

Örnek 4.85 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ reel sayı matrisinin satır uzayını bulunuz. $(10, 5, -15)$, $(6, 3, -8)$

vektörleri A matrisinin satır uzayına ait midir?

Örnek 4.86 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ matrisinin satır uzayının boyutu kaçtır?

Örnek 4.87 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ matrisinin satır uzayını bulunuz.

Teorem 4.88 Eşelon formdaki bir matrisin sıfır satırları hariç geri kalan satırları lineer bağımsızdır.

Örnek 4.87 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin satır uzayını bulunuz.

Teorem 4.88 V bir F - vektör uzayı ve $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ ve $0_F \neq \alpha \in F$ olsun. Bu durumda, her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için aşağıdakiler geçerlidir:

- i) $\langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$
- ii) $\langle v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_j + \alpha v_i, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle$

Sonuç 4.89 F bir cisim ve A , bir F matrisi ve e bir elemanter satır işlemi olsun. Bu durumda A ve $e(A)$ matrislerinin satır uzayları aynıdır.

Sonuç 4.90 F bir cisim ve A ve B , birer F matrisi olsun. Eğer A ve B matrisleri satırca denk matrislerse A nin satır uzayı ile B nin satır uzayı aynıdır.

Örnek 4.91 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 10 & 6 \\ 5 & 13 & 16 & 13 \end{pmatrix}$ matrisinin satır uzayının elemanlarını belirleyiniz. Bu alt vektör

uzayının boyutu kaçtır?

Sonuç 4.92 Rank kavramı iyi tanımlıdır.