

CEBİR II DERSİ ÖDEV SORULARI

1. Aşağıdaki iddialar doğru mudur? Neden?

- a) T bir esas ideal bölgesi, $a, b \in T^*$ olsun. $T = \langle a, b \rangle$ olması için gerekli ve yeterli koşul a ile b nin aralarında asal olmasıdır.
- b) $a + bi \in G$; $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$ asal ise, $a - bi \in G$ asaldır.
- c) $5 + 3i, 3 + 4i \in G$ aralarında asaldır.
- d) F bir cisim olsun. Bu durumda, her $a, b \in F^*$ için, a ile b aralarında asaldır.
- e) $G / \langle 7 + 2i \rangle$ bölüm halkası bir cisimdir.
- f) p bir pozitif asal sayı, $a + bi \in G$ ve $1 < a^2 + b^2 < p^2$ olsun. Eğer $a + bi \mid p$ ise $a - bi \in G$ asaldır.
- g) İki tamlık bölgesinin aritmetik birimleri grubu izomorf ise bu tamlık bölgelerinin eleman sayıları aynıdır.
- ğ) Bir esas ideal bölgesinin her izomorf resmi de bir esas ideal bölgesidir.
- h) T bir tamlık bölgesi, $\varepsilon \in A(T)$ ve $p \in T$ asal olsun. Bu durumda, $p\varepsilon \in T^* - A(T)$ ve $p\varepsilon \in T$ asaldır.
- ı) T, S iki tamlık bölgesi, $p \in T$ olsun. Eğer, $p \in S$ asal ise, $p \in T^* - A(T)$ ve $p \in T$ asaldır.
- i) T bir tamlık bölgesi, I da T nin bir ideali olsun. Eğer, $I \cap A(T) \neq \emptyset$ ise $I \cap A(T) = A(T)$ dir.
- j) Birbirine izomorf iki tamlık bölgesinden biri bir asal çarpanlara ayrılış bölgesi ise diğeri de bir asal çarpanlara ayrılış bölgesidir.
- k) T bir tamlık bölgesi, $a, b, k \in T^*$, $\varepsilon \in A(T)$ olsun. Eğer, k a ile b nin bir en küçük ortak katı ise εk da a ile b nin bir en küçük ortak katıdır.
- l) H bir halka, J de H nin bir maksimal ideali ise H / J bir cisimdir.
- m) $J, \mathbb{Z}_\zeta$ halkasının bir maksimal ideali olsun. Bu durumda, $\mathbb{Z}_\zeta / J$ bir cisimdir.
- n) T bir sonlu tamlık bölgesi, $\text{Kar}T = p$ olsun. Bu durumda,
- $\varphi: T \rightarrow T; r \mapsto r^p$ T nin bir otomorfisidir.

o) Her tamlık bölgesi bir asal çarpanlara ayrılış bölgesidir.

ö) Her tamlık bölgesi bir Öklid bölgesidir.

p) Her tamlık bölgesi bir esas ideal bölgesidir.

r) T bir tamlık bölgesi, d de T üzerinde tanımlanmış bir çarpımsal norm $a, b \in T$ olsun. Eğer, $d(a) \mid d(b)$ ise $a \mid b$ dir.

s) T bir tamlık bölgesi, $\varphi: T \rightarrow T$; $a \mapsto a$ bir halka homorfisi, $\varepsilon \in A(T)$ olsun. Eğer, $\varepsilon \in \text{Ker}\varphi$ ise $T = \text{ker}\varphi$ dir.

ş) T bir tamlık bölgesi, $a \in T$, $\varphi: T \rightarrow T$ bir halka homorfisi, d ise T üzerinde tanımlanmış bir çarpımsal norm olsun. Eğer $a \in A(T) - \text{Ker}\varphi$ ise $d(\varphi(a)) = 1$ dir.

t) T, S iki tamlık bölgesi ve $T \leq S$ olsun. Eğer, T bir esas ideal bölgesi ise S de bir esas ideal bölgesidir.

u) p bir pozitif asal sayı olsun. Bu durumda,

“ $p \in G$ asal değildir $\Leftrightarrow p = a^2 + b^2$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır.”
dir.

ü) $\mathbb{Z}_\zeta$ tamsayılar halkasında her maksimal ideal bir asal idealdir.

v) H bir halka olsun. Eğer $\varphi: H \rightarrow H$; $x \mapsto x^2$ bir halka otomorfisi ise H komütatifdir.