

CEBİR III ÖDEV 2

1. Aşağıdaki iddialar doğru mudur? Neden?

a) $F \leq E$ bir cisim genişlemesi, $\alpha \in E$ olsun. Eğer, $\alpha^2 \in F$ üzerinde cebirsel ise, α da F üzerinde cebirseldir.

b) $F \leq E$ bir cisim genişlemesi, $\alpha, \beta \in \overline{F_E}$, $f(x) \in F[x]^*$ olsun. Eğer, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ise, $\varphi(\alpha) = \beta$ olacak biçimde bir $\varphi: F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ halka izomorfisi vardır.

c) p bir pozitif asal sayı, $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer, $a + b\sqrt{p}$, $f(x)$ in bir kökü ise $a - b\sqrt{p}$ de $f(x)$ in bir köküdür.

d) $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ tir.

e) $F \leq E$ bir cisim genişlemesi, $\alpha, \beta \in \overline{F_E}$ olsun. Bu durumda,

$$[F(\alpha, \beta) : F] = \deg(\alpha, F) \deg(\beta, F)$$

dir.

f) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 4$ tür.

g) $\pi^3 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirseldir.

ğ) Transandant sayılar kümesi reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir.

h) $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ bir basit genişlemedir.

ı) $[F : \mathbb{C}] = 2$ olacak biçimde bir $\mathbb{C} \leq F$ cisim genişlemesi vardır.

i) F cebirsel kapalı bir cisim, $f(x) \in F[x]$ olsun. Eğer, $f(x) \in F[x]$ asal ise, $\deg f(x) = 1$ dir.

j) F bir cisim olsun ve $p := \text{kar} F \neq 0$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda,

$$\varphi: F \rightarrow F \quad ; \quad a \mapsto a^p \quad F \text{ nin bir otomorfisidir.}$$

k) $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ dir.

l) $\deg(\sqrt{3}, \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})) = 2$

m) Her basit genişleme sonludur.

n) $F \leq E$ bir sonlu basit cisim genişlemesi olsun. Bu durumda, $[E : F]$ bir asal sayıdır.

o) $F \leq E$ bir cisim genişlemesi olsun. Eğer bu genişleme sonlu bir genişleme ise, $\overline{F_E} = E$ dir.

ö) p bir pozitif asal sayı, $\mathbb{Z}_p \leq E$ bir cisim genişlemesi; $\alpha \in E$, $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]^*$ monik polinomunun bir kökü olsun ve $n := \deg f(x)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda,

$$|\mathbb{Z}_p(\alpha)| = p^n$$

dir.

p) $F \leq E$ bir cisim genişlemesi, $\alpha \in \overline{F_E}$, $a, b \in F$ olsun. Bu durumda,

$$\deg(a + b\alpha, F) \mid \deg(\alpha, F)$$

dir.

r) $F \leq E$ bir cisim genişlemesi olsun. Eğer $\overline{F_E} = E$ ise, $F \leq E$ bir sonlu genişlemedir.

s) $F \leq E$ bir cisim genişlemesi, $\alpha \in E$, F üzerinde cebirsel, n bir doğal sayı, $\deg(\alpha, F) = 2n$ olsun. Bu durumda, $\deg(\alpha^2, F) = n$ dir.

ş) F bir cisim olsun. Eğer aşağıdaki koşul gerçekleşirse, F cebirsel kapalı bir cisimdir:

“Her $f(x) \in F[x]$ asal polinomu için $\deg f(x) = 1$ dir”

Not: POLİNOMLAR HALKASINDAKİ ASALLIK KRİTERLERİNİ ÇALIŞMAYI UNUTMAYINIZ.