

Bölüm 2 Matrisler

Tanım 2.1 F bir cisim, m, n birer doğal sayı olsun. $a_{ij} \in F$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ifadesine } m \text{ satır } n \text{ sütundan oluşan (veya } m \times n \text{ tipinde) bir } F \text{ - matrisi denir.}$$

Böyle bir matris daha sade olarak $A = (a_{ij})_{m \times n}$ biçiminde gösterilir. Her bir a_{ij} değerine bu matrisin bir girdisi (elemanı, bileşeni) denir. Bir sütundan (satırdan) oluşan bir matrise bir sütun (satır) matrisi denir. Eğer $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise bu matrise n . dereceden bir kare matris denir. Tüm girdileri 0_F olan $m \times n$ tipindeki matrise sıfır matrisi denir ve bu matris $0_{m \times n}$ ile gösterilir. Her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$a_{ij} = \begin{cases} 1_F & ; \text{ eğer } i = j \text{ ise} \\ 0_F & ; \text{ eğer } i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

koşulunu sağlayan n . dereceden $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisine, n . dereceden birim matris denir ve bu matris I_n ile gösterilir. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{m \times n}$ birer F - matrisi olmak üzere eğer, her $i \in \{1, \dots, m\}$ ve her $j \in \{1, \dots, n\}$ için $a_{ij} = b_{ij}$ koşulu sağlanırsa $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{m \times n}$ matrislerine eşit matrisler denir ve $A = B$ yazılır.

Örnek 2.2

Tanım 2.3 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{m \times n}$ birer F - matrisi ve $\alpha \in F$ olsun. Bu durumda, her $i \in \{1, \dots, m\}$ ve her $j \in \{1, \dots, n\}$ için $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$ olmak üzere i . satır j . sütundaki girdisi c_{ij} olan yine $m \times n$ tipindeki $C = (c_{ij})_{m \times n}$ matrisine A ve B matrislerinin toplamı denir ve bu durumda $C = A + B$ yazılır. Her $i \in \{1, \dots, m\}$ ve her $j \in \{1, \dots, n\}$ için i . satır, j . sütununda αa_{ij} elemanı bulunan yine $m \times n$ tipindeki matrise α ile A 'nın skaler çarpımı denir ve bu matris αA ile gösterilir.

Örnek 2.4

Not 2.5 Sadece aynı tipteki matrisler toplanabilir.

Özellikler 2.6 m, n birer sabir doğal sayı, A, B, C $m \times n$ lik F - matrisleri $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + B = B + A$
3. $0_{m \times n} + A = A$
4. $A^* + A = 0_{m \times n}$ olacak biçimde bir $m \times n$ lik A^* , F - matrisi vardır (A^* yerine $-A$ yazacağız).
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Sonuç 2.7 m ve n birer sabit pozitif tam sayı olmak üzere, tüm $m \times n$ lik F - matrislerinin kümesi matrislerin toplanması işlemine göre bir değişmeli grup oluşturur.

Tanım 2.8 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{n \times k}$ birer F - matrisi olsun. Bu durumda, her $i \in \{1, \dots, m\}$ ve her $j \in \{1, \dots, k\}$ için

$$c_{ij} := \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

olmak üzere i . satır j . sütunundaki girdisi c_{ij} olan $m \times k$ tipindeki $C = (c_{ij})_{m \times k}$ matrisine A ve B matrislerinin verilen sıradaki çarpımı denir ve bu durumda $C = AB$ yazılır.

Örnek 2.9

Not 2.10 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{s \times k}$ birer F - matrisi olmak üzere A ve B matrislerinin verilen sıradaki çarpımı sadece $n = s$ olması durumunda tanımlıdır.

Uyarı 2.11 A, B birer F - matrisi olsun. AB ve BA matris çarpımları tanımlı olsa bile her zaman $AB = BA$ olması gerekmez.

Notasyon 2.12 m ve n birer sabit pozitif tam sayı olmak üzere tüm $n \times n$ lik F - matrislerinin kümesini $Mat(n, F)$ ile tüm $m \times n$ lik F - matrislerinin kümesini ise $Mat(m \times n, F)$ ile gösterelim.

Örneğin,

$$Mat(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}, \quad Mat(2 \times 1, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ dir.}$$

Özellikler 2.13 n bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $A, B, C \in Mat(n, F)$ için aşağıdakiler geçerlidir:

1. $AB \in \text{Mat}(n, F)$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $IA = A = AI \quad (I = I_{n \times n})$
4. $A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA$
5. $(\alpha A)B = A(\alpha B)$

İspat.

Sonuç 2.14 $\langle \text{Mat}(n, F); +, \cdot \rangle$ bir halkadır.

Tanım 2.15 $A \in \text{Mat}(n, F)$ olsun. Eğer, $AB = I = BA$ olacak biçimde bir $B \in \text{Mat}(n, F)$ matrisi varsa B ye A nın ters matrisi denir ve $B = A^{-1}$ yazılır. Tersi olan matrise tersinir (regüler) matris, tersi olmayan matrise ise tekil (singüler) matris denir.

Örnek 2.16 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dir.

Uyarı 2.17 Her kare matrisin tersi olmak zorunda değildir. Mesela $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi yoktur.

Teorem 2.18 Bir kare matrisin tersi varsa tektir.

Teorem 2.19 $A \in \text{Mat}(n, F)$ olsun. Eğer A tersinir ise A^{-1} matrisi de tersinirdir ve $(A^{-1})^{-1} = A$ dir.

Teorem 2.20 $A, B, C \in \text{Mat}(n, F)$ ve $C = AB$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

- i) A ve B tersinir ise C de tersinirdir.
- ii) A ve C tersinir ise B de tersinirdir.
- iii) B ve C tersinir ise A de tersinirdir.

Başka bir ifadeyle $C = AB$ eşitliği geçerli olmak üzere, A, B, C matrislerinden herhangi ikisi tersinir ise hepsi tersinirdir.

Tanım 2.21 A bir F - matrisi olsun. A nın satırları sütun yapılarak elde edilen matrise A nın devriği (transpozesi) denir ve bu matris A^T ile gösterilir.

Örnek 2.22

Not 2.23 Eğer A $m \times n$ tipinde bir matris ise A^T matrisi $n \times m$ tipindedir ayrıca $B = A^T$ ise her $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$ için $b_{ij} = a_{ji}$ dir.

Özellikler 2.24 A ve B , $m \times n$ tipinde birer F - matrisi, C , $n \times k$ tipinde bir F - matrisi ve $\alpha \in F$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir:

- i) $(A^T)^T = A$
- ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- iii) $\alpha A^T = (\alpha A)^T$ dir.
- iv) $(AC)^T = C^T A^T$ dir.

Sonuç 2.25 Bir kare matrisin tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul o matrisin transpozisinin tersinir olmasıdır.

Tanım 2.26 A bir F - matrisi olmak üzere, $A^T = A$ koşulu gerçekleşirse A ya bir simetrik matris denir. $A^T = -A$ koşulu gerçekleşirse A ya bir ters simetrik matris denir.

Örnek 2.27

Not 2.28 Simetrik (ters simetrik) matrisler kare matrislerdir.

Özellik 2.29 Aynı tipte iki simetrik matrisin (ters simetrik matrisin) toplamı bir simetrik (ters simetrik) matristir. Bir simetrik (ters simetrik) matrisin bir skalerle çarpımı yine bir simetrik (ters simetrik) matristir).

Tanım 2.30 $A = (a_{ij}) \in Mat(n, F)$ olsun. Eğer her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $i \neq j$ ise $a_{ij} = 0$ koşulu gerçekleşirse A ya bir köşegen matris denir ve bu durumda $A = diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$ yazılışı kullanılır. Bir A köşegen matrisinde köşegen üzerindeki tüm elemanlar eşit ise yani $a_{11} = \dots = a_{nn}$ ise A ya bir skaler matris denir.

Eğer $A = (a_{ij}) \in Mat(n, F)$ matrisi $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $i > j$ ise $a_{ij} = 0$ koşulunu sağlıyorsa A matrisine bir üst üçgensel matris denir.

Eğer $A = (a_{ij}) \in Mat(n, F)$ matrisi $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $i < j$ ise $a_{ij} = 0$ koşulunu sağlıyorsa A matrisine bir alt üçgensel matris denir.

Örnek 2.31

Not 2.32 $A = (a_{ij}) \in Mat(n, F)$ bir skaler matris ise $A = \alpha I$ olacak biçimde bir $\alpha \in F$ vardır.

Özellik 2.33 $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n, F)$ bir skaler matris olmak üzere her $B \in \text{Mat}(n, F)$ için $AB = BA$ dır.

Tanım 2.34 $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n, F)$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n a_{ii} \in F$ değerine A matrisinin izi denir ve bu değer $\text{iz}A$ ile gösterilir.

Örnek 2.35

Özellik 2.36 $A, B \in \text{Mat}(n, F)$ ve $\alpha \in F$ olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir:

- i) $\text{iz}(A + B) = \text{iz}A + \text{iz}B$,
- ii) $\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$,
- iii) $\text{iz}(\alpha A) = \alpha \text{iz}(A)$

Tanım 2.37 $A, B \in \text{Mat}(n, F)$ olsun. Eğer $P^{-1}AP = B$ olacak biçimde bir $P \in \text{Mat}(n, F)$ tersinir matrisi varsa A ve B matrislerine benzer matrisler denir.

Teorem 2.38 Benzer matrislerin izleri aynıdır.

Notasyon 2.39 $A_{m \times n}$ bir F - matrisi olmak üzere her $i \in \{1, \dots, m\}$ için A matrisinin i . satırını A_i ile

gösterelim. Bu durumda $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ biçiminde ifade edilir.

Özellik 2.40 $A_{m \times n}$, $B_{n \times k}$ birer F - matrisi olsun. Bu durumda her $i \in \{1, \dots, m\}$ için $A_i B = (AB)_i$ dir.

İspat.

Sonuç 2.41 Satırlarından birisi tamamen sıfır olan bir matris bir tekil matristir.

İspat.

Tanım 2.42 $A_{m \times n}$ bir F - matrisi olmak üzere, A nın iki tane satırının yer değiştirmesi işlemine 1. tip elemanter satır işlemi denir. A nın bir satırını $0_F \neq \alpha \in F$ ile çarpılması işlemine 2. tip elemanter satır işlemi denir. A matrisinin i . satırının bir $\alpha \in F$ katının j . satıra eklenmesi işlemine 3. tip elemanter satır işlemi denir. e bir elemanter satır işlemi olmak üzere A matrisine e işlemini uygulamakla elde edilen matris $e(A)$ ile gösterilir.

Örnek 2.43

Özellik 2.44 Elemanter satır işlemlerinin tersi vardır ve tersleri de elemanter satır işlemidir. Başka bir ifadeyle e_1 bir elemanter satır işlemi ve A bir F - matrisi olmak üzere $e_2(e_1 A) = A$ olacak biçimde bir e_2 elemanter satır işlemi vardır.

Tanım 2.45 A, B birer F - matrisi olsun. Eğer A matrisine sonlu sayıda elemanter satır işlemi uygulanarak B matrisi elde edilebiliyorsa A ve B matrislerine satırca denk matrislerdir denir ve bu durumda $A \sim B$ yazılır.

Örnek 2.46 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 16 \end{pmatrix}$ ve I_3 matrisleri satırca denk matrislerdir.

Özellik 2.47. A, B ve C birer F - matrisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

- i) $A \sim A$
- ii) $A \sim B$ ise $B \sim A$ dır.
- iii) $A \sim B$ ve $B \sim C$ ise $A \sim C$ dir.

Yani matrislerde satırca denk olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat.

Tanım 2.48 Bir A matrisinde tamamı sıfırlardan oluşan bir satıra(sütuna) sıfır satırı(sütunu) denir.

Örnek 2.49

Tanım 2.50 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ bir F - matrisi olmak üzere aşağıdaki koşullar gerçekleşirse A matrisine bir merdiven (basamak) matris denir (veya " A matrisi Eşelon formdadır" denir):

- i) $0 < r \leq m$ olmak üzere ilk r satır sıfır satırından farklıdır ve sonraki satırlar (eğer varsa yani $r < m$ ise) sıfır satırıdır.
- ii) Her $i \in \{1, \dots, r-1\}$ için i . satırın sıfırdan farklı ilk elemanı bir sonraki satırın sıfırdan farklı ilk elemanının solunda kalır başka bir ifadeyle ilk r satırdaki sıfırdan farklı ilk elemanlar sırasıyla $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ ise $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ dir.

Örnek 2.51

Örnek 2.52 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisini elemanter satır işlemleri uygulayarak Eşelon formda bir matrise dönüştürünüz.

Teorem 2.53 Sıfır matrisinden farklı her matris bir merdiven matrise satırca denktir. Başka bir ifadeyle sıfır matrisinden farklı her matris bir takım elemanter satır işlemleri uygulanarak bir merdiven matrise dönüştürülebilir.

Tanım 2.54 $A_{m \times n}$ bir F - matrisi olsun. A matrisine satırca eşdeğer olan merdiven matrisdeki sıfır satırından farklı satır sayısına A matrisinin rankı denir ve bu değer $rank A$ ile gösterilir.

Uyarı 2.55 Rank kavramının iyi tanımlı olduğunu ileride göreceğiz.

Örnek 2.56

Tanım 2.57 $A_{m \times n}$ bir F – merdiven matrisi olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul gerçekleşirse “ A bir satırca indirgenmiş merdiven matris” veya “ A satırca indirgenmiş eşelon formda bir matristir” denir

- i) A nın tüm ayrıcalıklı elemanları 1_F dir.
- ii) Ayrıcalıklı elemanların bulunduğu sütunda diğer elemanların hepsi sıfırdır.

Örnek 2.58

Teorem 2.59 Her merdiven matris uygun bir satırca indirgenmiş merdiven matrise satır denktir.

Sonuç 2.60 Sıfırdan farklı her matris uygun bir satırca indirgenmiş merdiven matrise satır denktir.

Örnek 2.61

Teorem 2.62 $A, B \in Mat(n, F)$ ve e bir elemanter satır işlemi olsun. Bu durumda $e(AB) = (eA)B$ dir.

Tanım 2.63 Birim matrise sadece 1 tane elemanter satır işlemi uygulayarak elde edilen matrise bir elemanter satır matrisi denir. Başka bir ifadeyle e bir elemanter satır işlemi olmak üzere $e(I_n)$ biçimindeki matrise bir elemanter satır matrisi denir.

Teorem 2.64 Elemanter satır matrisleri tersinirdir ve bu matrislerin tersleri de elemanter satır matrisidir.

Örnek 2.65

Yardımcı Teorem 2.66 $A, B \in \text{Mat}(n, F)$, e bir elemanter satır işlemi ve $e(A) = B$ olsun. Bu durumda A nın tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul B nin tersinir olmasıdır.

Sonuç 2.67 $A, B \in \text{Mat}(n, F)$ satırca denk matrisler olsun. Bu durumda A nın tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul B nin tersinir olmasıdır.

Teorem 2.68 $A \in \text{Mat}(n, F)$ olsun. Bu durumda A nın tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul A nın I_n birim matrisine satırca denk olmasıdır.

Teorem 2.69 $A \in \text{Mat}(n, F)$ bir tersinir matris olsun. Bu durumda $(A | I_n) \sim (I_n | A^{-1})$

Örnek 2.70 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 16 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulalım.

Sonuç 2.71 Bir matrisin tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul o matrisin elemanter satır matrislerinin çarpımı biçiminde yazılabilmesidir.