

Kuantum Alanlar Teorisi Final Sınavı

1. $\phi(x)$ şeklinde verilen kompleks ve etkileşimsiz bir skaler alan için

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^\dagger \quad (1)$$

şeklinde verilen bir Lagrange yoğunluğunu dikkate alınız. Denklem (1) de yer alan kuantize skalar alan

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2)$$

şeklinde dir. Burada $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ve $p^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ dir. Operatörler $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^\dagger$, $b_{\mathbf{p}}$ ve $b_{\mathbf{p}}^\dagger$,

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (3)$$

komütasyon ilişkisini sağlar.

- (a) ϕ ve $\phi^\dagger$ a konjuge olan π ve $\pi^\dagger$ momentum yoğunluklarını elde ediniz. ϕ ve $\phi^\dagger$ a konjuge olan π ve $\pi^\dagger$ arasındaki tüm 'equal-time' komütasyon ilişkilerini yazınız. Ayrıca ϕ ve π arasındaki 'equal-time' komütasyon ilişkisin Denklem (3) teki komütasyon ilişkisi gibi olduğunu gösteriniz.
- (b) Denklem (3) deki ilişkiyi kullanarak 'unequal-time' komütasyon ilişkisinin

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{3E_{\mathbf{p}}} (e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}) \quad (4)$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. Ayrıca bu ifadenin ϕ ve π için 'equal-time' komütasyon ilişkisini de vereceğini gösteriniz.

- (c) $(x - y)^2 < 0$ olduğunda $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$ ifadesinin formu nasıl olur? Bu durum fiziksel olarak neye karşı gelir?

2. Klasik Dirac alanı $\psi(x)$ nin

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (5)$$

Dirac denklemini sağladığını kabul edelim. Burada $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_4$ ve 1_4 4×4 birim matristir. Weyl tabanında gamma matrisleri

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

şeklinde verilir. Burada 1_2 2×2 birim matristir, σ^i ler $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k$ eşitliğini sağlayan Pauli matrisleridir. $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi$ çarpımını dikkate alarak, Dirac denklemini sağlayan $\psi(x)$ fonksiyonunun Klein-Gordon denklemini de sağlayacağını gösteriniz.

3. Korunumlu akımlar: Kompleks Skaler Alan $\Phi(x)$ kompleks skaler (spin 0) alanının dinamiği aşağıdaki Lagrangejiyen yoğunluğu ile tarif edilir

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \Phi^*)(\partial_\mu \Phi) - V(\Phi^* \Phi) \quad (7)$$

burada V keyfi bir potansiyeldir.

- (a) Herhangi bir V potansiyeli için global $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{i\theta} \Phi$ transformasyonu altında Lagrangejiyenin invariant (değişmez) kaldığını gösteriniz, burada $\partial_\mu \theta = 0$ dır.
- (b) Φ için hareket denklemini bulunuz.
- (c) J_μ 'yi aşağıdaki gibi kabul ederek,

$$J_\mu = \Phi^*(\partial_\mu \Phi) - (\partial_\mu \Phi^*)\Phi \quad (8)$$

Φ ve Φ^* 'nin hareket denklemini sağladığı durumda $\partial^\mu J_\mu = 0$ eşitliğinin sağlanacağını gösteriniz.

4. Dirac Denkleminin Çözümleri Gamma matrislerinin Dirac tabanları şöyle verilir

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \tau^i \\ -\tau^i & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

burada τ^i ($i = 1, 2, 3$) aşağıdaki eşitliği sağlayan Pauli matrisidir. $\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} \tau_k$ (gerekli ise bir yada iki durumu sağlayınız). Bu soruda Dirac denkleminin aşağıdaki formda dört çözümünü bulacağız

$$\begin{pmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \end{pmatrix} \quad (10)$$

burada $\omega_p = |\sqrt{p^2 + m^2}| \geq 0$ olmak üzere, $w_1(p)$ ve $w_2(p)$ iki boyutlu vektörlerdir. Buradaki ipucu dört boyutlu uzayın, ikiye-ikiye bir alt kümesi ile çalışmaktır. Ayrıca Pauli matrislerinin açık ifadesini kullanmayız.

- (a) Gamma matrislerinin Dirac gösteriminde ifade edilmesi durumunda, momentum uzayında Dirac denkleminin aşağıdaki iki boyutlu matris denklem çiftlerini verdiğini gösteriniz

$$(p_0 - m)w_1(p) + p_i \tau_i w_2(p) = 0, \quad -p_i \tau_i w_1(p) - (p_0 + m)w_2(p) = 0 \quad (11)$$

τ_i Pauli matrislerindeki ve w_a vektörlerindeki iki boyutlu spinor indisleri tam iken, $i = 1, 2, 3$ uzaysal indisleri açık olarak bir toplam ile ifade edilir.

- (b) $a = 1$ veya 2 için $(p_0^2 - |p|^2 - m^2)w_a(p) = 0$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.
- (c) $\chi_1 = (1, 0)^T$ ve $\chi_2 = (0, 1)^T$, χ_s baz vektörü olmak üzere, eğer $w_1 = \chi_s$ sağlanıyorsa işaretleri $(p_0, s = 1, 2)$ olmak üzere Dirac denkleminin dört adet çözümünün olduğunu gösteriniz. Bu durumda w_2 'yi belirlemeniz gerekmektedir. Bu tam dört boyutlu spinorleri şöyle ifade ederiz, $p_0 = +\omega_p$ için $U_s(p)$ ve $p_0 = -\omega_p$ için $V_s(p)$. Ayrıca çözümleri yeniden ölçeklendirerek ve üçlü momentumları yeniden etiketliyerek, U_s 'nin u_s , V_s ve v_s cinsinden yazılabileceğini gösteriniz. Burada $u_s(p)$ ve $v_s(p)$ aşağıdaki gibi ifade edilen Dirac bazları cinsinden verilen standart çözümlerdir

$$u_r(p) = (\omega_p + m)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{p^i \tau^i}{(\omega_p + m)} \chi_r \end{pmatrix}, \quad v_r(p) = (\omega_p + m)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p^i \tau^i}{(\omega_p + m)} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \quad (12)$$

- (d) $p_0 = \omega_p \geq 0$ olmak üzere, bu iki çözümün

$$(\not{p} - m)u_s(p) = 0, \quad (\not{p} + m)v_s(p) = 0 \quad (13)$$

eşitliklerini sağladığını gösteriniz.

- (e) Denklem (12)'de Dirac bazları cinsinde verilen $u_s(p)$ ve $v_s(p)$ standart çözümlerinin aşağıdaki ortonormalizasyon şartlarını sağladığını gösteriniz:

$$(u_r(\mathbf{p}))^\dagger u_s(\mathbf{p}) = 2\omega_p \delta_{sr}, \quad \bar{u}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = +2m \delta_{sr}, \quad (v_r(\mathbf{p}))^\dagger v_s(\mathbf{p}) = 2\omega_p \delta_{sr}, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = -2m \delta_{sr}, \quad \bar{u}_r(\mathbf{p}) v_s(+p) = 0, \quad (u_r(\mathbf{p}))^\dagger v_s(-p) = 0$$