İleri Kuantum Mekaniği Final Sınav Soruları

1. Bir iki durumlu sistem için Hamiltonyan

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} E_1^0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

şeklinde verilir. Bu sistem için yozlaşmamış durum ($\lambda = 0$) öz vektörleri ise

$$\phi_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \phi_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Bu problem için enerji özdeğerleri E_1 ve E_2 ve enerji özfonksiyonları ψ_1 ve ψ_2 yi elde ediniz.

2. Verilen A matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. $\psi(x) = (\frac{\pi}{\alpha})^{-1/4} \exp(-\alpha x^2/2)$ dalga fonksiyonunu kullanarak $< x^2 >$ yi elde ediniz.

4. $\phi\,(x)$ şeklinde verilen kompleks ve etkileşimsiz bir skaler alan için

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^\dagger - \frac{1}{2}m^2\phi\phi^\dagger \tag{4}$$

şeklinde verilen bir Lagrange yoğunluğunu dikkate alınız. Denklem (1) de yer alan kuantize skalar alan

$$\phi\,(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}.\mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}.\mathbf{x}}\right) \tag{5}$$

şeklindedir. Burada $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ve $p^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ dir. Operatörler $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^\dagger$, $b_{\mathbf{p}}$ ve $b_{\mathbf{p}}^\dagger$,

$$\left[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger\right] = \left[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger\right] = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}\,(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tag{6}$$

komütasyon ilişkisini sağlar. ϕ ve $\phi^\dagger$ a konjuge olan Π ve $\Pi^\dagger$ momentum yoğunluklarını elde ediniz. ϕ ve $\phi^\dagger$ a konjuge olan Π ve $\Pi^\dagger$ arasındaki tüm 'equal-time' komütasyon ilişkilerini yazınız. Ayrıca ϕ ve Π arasındaki 'equal-time' komütasyon ilişkisin Denklem (3) teki komütasyon ilişkisi gibi olduğunu gösteriniz.

5. Bir boyutta x konum ve p_x çizgisel momentum olsun; i) Poision parentezinin sonucunu bulunuz

$$[x, F(p_x)]_{klasik} \tag{7}$$

ii) x konum ve p_x in kuantum mekaniksel harmonik salınıcının konum ve momentum operatörleri ise bu kez

$$\left[x, \exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\right] \tag{8}$$

iafdesinin neye eşit olduğunu gösteriniz, iii) Bu kez (ii) de bulduğunuz sonucu kullanarak

$$\exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)|x' > \tag{9}$$

ifadesinin neye eşit olduğunu gösteriniz.

6. Yüklü bir parçacık için kompleks Schrodinger Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla\psi^*\right)\left(\nabla\psi\right) - \frac{\hbar}{2i}\left[\psi^*\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\psi\right] - \psi^* V(x)\psi \tag{10}$$

şeklinde verilir. Bu ifadeyi kullanarak Noether akımını ve yükünü belirleyiniz.

7. Klasik alanlar için *eylem integrali* Lagrange yoğunluğu cinsinden

$$S = \int dt' \int d^3x \mathcal{L}\left(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha\right) \tag{11}$$

şeklinde verilir. Bu ifadeyi kullanarak Noether akımını ve yükünü belirleyiniz. Skalar alan ϕ^α ya eşlenik olan alan momentum yoğunluğu $\Pi^0_\alpha(x)$ ifadesinin

$$\Pi^0_\alpha(x^\nu) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}\mathcal{L}\left(\phi^\beta, \partial_\mu\phi^\beta\right) \tag{12}$$

şeklinde verileceğini gösteriniz.

8. Skalar alan ϕ için Lorentz Lagrange ifadesi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi\right) - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2\right] \tag{13}$$

ifadesinden başlayarak Euler-Lagrange denklemini ve Hamiltonyan $\mathcal{H}$ yi belirleyiniz.

9. Bra ve ket cebirini kullanarak X ve Y operatörleri üzerindeki işlemleri yapınız;

$$tr\,(XY) = tr\,(YX) \tag{14}$$

$$(XY)^{\dagger} = Y^{\dagger}X^{\dagger} \tag{15}$$

$$\exp\left[if(A)\right] = ? \tag{16}$$

A burada Hermityen bir operatördür.

10. Kaynaklı Maxwell denklemlerinin alan tensörü $F^{\nu,mu}$ cinsinden

$$\partial_{mu}F^{\nu,\mu} = \frac{4\pi}{c}j^{\mu} \tag{17}$$

şeklinde verieceğini gösteriniz.

11. spinsiz parçacıkları dikkate alalım. Bu tür parçacıklar için Hamiltonyan

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N}\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r_i)\right] \tag{18}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu hamiltonyanın ikinci kuantumlanmış formunun

$$\mathcal{H} = \int d^d r a^{\dagger}(r)\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r_i)\right]a(r) \tag{19}$$

şeklinde verileceğini gösteriniz.

12. Bir A operatörünün öz-keti $\{|a>\}$ tarafından gerilen bir ket uzayını dikkate alınız ve

$$\prod_{a'}(A - a') \tag{20}$$

ifadesinin boş olduğunu gösteriniz. Ayrıca

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{(A - a'')}{(a' - a'')} \tag{21}$$

ifadesinin önemini açıklayınız.

13. Bir boyutlu bir salınıcının zamana bağlı kuvvet ifadesi

$$F(t) = \frac{F_0\tau/\omega}{\tau^2 + t^2} \tag{22}$$

şeklindedir. Varsayınız ki $t = -\infty$ salınıcı taban durumda bulunsun. Zamana bağlı pertürbasyon teorisini kullanarak salınıcının $t = +\infty$ de birinci uyarılmış durumda bulunma olasılığını hesaplayınız.

Not: Beş soru seçiniz.
Başarılar